Couverture et calcul de Malliavin

L. Decreusefond

TPT

Modèle binomial

Modèle binomial

Actif sûr

$$X_0 \longrightarrow X_0(1+r)$$

Modèle binomial

Actif sûr

$$X_0 \longrightarrow X_0(1+r)$$

Actif risqué

$$\begin{tikzcd} & S^u = S_0 u \\ S_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & S^d = S_0 d \end{tikzcd}$$

Modèle binomial

Actif sûr

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] X_0 \arrow[r] & X_0(1+r) \end{tikzcd}$$

Actif risqué

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] & S^u = S_0 u \\ S_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & S^d = S_0 d \end{tikzcd}$$

Valeur du contrat :

$$\begin{cases} V^u & \text{si } S_1 = S^u \\ V^d & \text{si } S_1 = S^d. \end{cases}$$

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

  Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

  Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.

  - Si le prix réel $S_0 u$ est supérieur à K, le détenteur du call exerce son droit d'achat et revend aussitôt. Il gagne donc $S_0 u - K$.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.

  - Si le prix réel $S_0 u$ est supérieur à K, le détenteur du call exerce son droit d'achat et revend aussitôt. Il gagne donc $S_0 u - K$.
  - Sinon, le détenteur du call ne fait rien et donc ne gagne, ni ne perd.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

  > *Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.*

  - Si le prix réel $S_0 u$ est supérieur à K, le détenteur du call exerce son droit d'achat et revend aussitôt. Il gagne donc $S_0 u - K$.
  - Sinon, le détenteur du call ne fait rien et donc ne gagne, ni ne perd.
- Call américain : on peut exercer ce droit n'importe quand avant T.

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

  Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.

  - Si le prix réel $S_0 u$ est supérieur à K, le détenteur du call exerce son droit d'achat et revend aussitôt. Il gagne donc $S_0 u - K$.
  - Sinon, le détenteur du call ne fait rien et donc ne gagne, ni ne perd.
- Call américain : on peut exercer ce droit n'importe quand avant T.
- Put : droit de vente.

Question

3 paramètres

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice
- T maturité

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice
- T maturité

2 questions

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice
- T maturité

2 questions

- Prix du contrat

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice
- T maturité

2 questions

- Prix du contrat
- Stratégie de couverture

Arbitrage

Définition

Il y a arbitrage lorsque

Arbitrage

Définition

Il y a arbitrage lorsque

1. On est certain de ne pas perdre d'argent,

Arbitrage

Définition

Il y a arbitrage lorsque

1. On est certain de ne pas perdre d'argent,
2. la probabilité de gagner de l'argent est strictement positive.

Opportunité d'arbitrage

Si la condition

$$d \leq 1 + r \leq u \tag{1}$$

n'est pas respectée, il y a opportunité d'arbitrage.

Opportunité d'arbitrage

Si la condition
$$d \leq 1 + r \leq u \tag{1}$$
n'est pas respectée, il y a opportunité d'arbitrage.

$1 + r \leq d \leq u$ On emprunte S_0 au taux r et on investit tout dans l'actif. Fortune finale X_1

$$X_1 \geq S_0 d - S_0(1 + r) \geq 0.$$

Opportunité d'arbitrage

Si la condition
$$d \leq 1 + r \leq u \tag{1}$$
n'est pas respectée, il y a opportunité d'arbitrage.

$1 + r \leq d \leq u$ On emprunte S_0 au taux r et on investit tout dans l'actif. Fortune finale X_1
$$X_1 \geq S_0 d - S_0(1 + r) \geq 0.$$

$d \leq u \leq 1 + r$ On vend à crédit l'actif, ce qui rapporte S_0. On place le tout à $r\%$.
$$X_1 \geq S_0(1 + r) - S_0 u \geq 0.$$

Non arbitrage et rentabilité

Si absence d'opportunité d'arbitrage, alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}_p$ telle que

$$\mathbf{E}_p\left[S_1\right] = S_0(1+r).$$

Non arbitrage et rentabilité

Si absence d'opportunité d'arbitrage, alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}_p$ telle que

$$\mathbf{E}_p\left[S_1\right] = S_0(1+r).$$

$$\mathbf{E}_p\left[S_1\right] = pS_0u + (1-p)S_0d$$

donc

$$\begin{aligned} pu + (1-p)d &= 1 + r \\ \iff p &= \frac{1+r-d}{u-d}. \end{aligned} \tag{2}$$

◂ opportunite martingale

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
  - s'endetter

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
    - s'endetter
    - investir à $r\,\%$,

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
  - s'endetter
  - investir à $r\,\%$,
  - acheter ou vendre des parts fractionnaires de S.

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
  - s'endetter
  - investir à r %,
  - acheter ou vendre des parts fractionnaires de S.
- On doit

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
  - s'endetter
  - investir à r %,
  - acheter ou vendre des parts fractionnaires de S.
- On doit
  - ne pas courir de risque,

Risque neutre

- On veut vendre, à l'instant 0, un contrat basé sur l'actif S qui sera réalisé à l'instant 1.
- Il faut déterminer le prix de ce contrat
- et le moyen de l'honorer.
- On peut
    - s'endetter
    - investir à $r\,\%$,
    - acheter ou vendre des parts fractionnaires de S.
- On doit
    - ne pas courir de risque,
    - ne pas en faire courir à l'acheteur.

Principe

- X_0 : prix de vente du contrat

Principe

- X_0 : prix de vente du contrat
- α_0 : nombre de parts de l'actif S achetées à l'instant 0.

Principe

- X_0 : prix de vente du contrat
- α_0 : nombre de parts de l'actif S achetées à l'instant 0.

Fortune finale

$$X_1 = \alpha_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

On veut que

$$X_1 = V_1.$$

Calculs

$S_1 = S_0 u$

$$V^u = \alpha_0 S_0 u + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

Calculs

$S_1 = S_0 u$

$$V^u = \alpha_0 S_0 u + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

$S_1 = S_0 d$

$$V^d = \alpha_0 S_0 d + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

Calculs

$S_1 = S_0 u$

$$V^u = \alpha_0 S_0 u + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

$S_1 = S_0 d$

$$V^d = \alpha_0 S_0 d + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} S_0(u-1-r)\alpha_0 & + (1+r)X_0 & = V^u \\ S_0(d-1-r)\alpha_0 & + (1+r)X_0 & = V^d \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
S_0(u-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^u \\
S_0(d-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^d
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} S_0(u-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^u \\ S_0(d-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^d \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{V^u - V^d}{S_0(u-d)} \\
X_0 &= \frac{1}{1+r}\left(V^u - \frac{u-1-r}{u-d}(V^u - V^d)\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}\,V^u + \frac{u-1-r}{u-d}\,V^d\right).
\end{aligned}$$

Transformations

$$\alpha_0 = \frac{V^u - V^d}{S_0(u-d)} = \frac{V^u - V^d}{S^u - S^d}.$$

risque neutre

Transformations

$$\alpha_0 = \frac{V^u - V^d}{S_0(u-d)} = \frac{V^u - V^d}{S^u - S^d}.$$

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}\,V^u + \frac{u-1-r}{u-d}\,V^d\right) = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}_p\left[V_1\right].$$

risque neutre

Théorème

Théorème

L'absence d'opportunité d'arbitrage

est équivalente à la propriété

Théorème

L'absence d'opportunité d'arbitrage

est équivalente à la propriété

Il existe une probabilité **P** *telle que pour pour tout contrat, sa valeur sans risque soit donnée par*

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}_p\left[V_1\right],$$

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.
- Seuls deux paramètres comptent : u et d.

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.
- Seuls deux paramètres comptent : u et d.
- Risque uniquement lié au modèle.

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.
- Seuls deux paramètres comptent : u et d.
- Risque uniquement lié au modèle.
- Comment estimer u et d ?

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.
- Seuls deux paramètres comptent : u et d.
- Risque uniquement lié au modèle.
- Comment estimer u et d ?
- On ne peut pas envisager un modèle où l'actif peut prendre plus de 2 valeurs.

Modèle à 3 périodes

- $S_0 = 4,\ r = 0,4$

Modèle à 3 périodes

- $S_0 = 4,\ r = 0,4$
- $u = 2,\ d = 1/2$ donc $p = 1/2$.

Modèle à 3 périodes

- $S_0 = 4,\ r = 0,4$
- $u = 2,\ d = 1/2$ donc $p = 1/2$.
- Taux d'intérêt nul.

Modèle à 3 périodes

- $S_0 = 4$, $r = 0,4$
- $u = 2$, $d = 1/2$ donc $p = 1/2$.
- Taux d'intérêt nul.
- Contrat = call européen maturité 3, prix d'exercice 6.

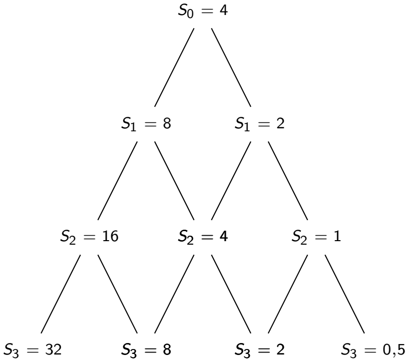


FIGURE – Evolution à 3 pas

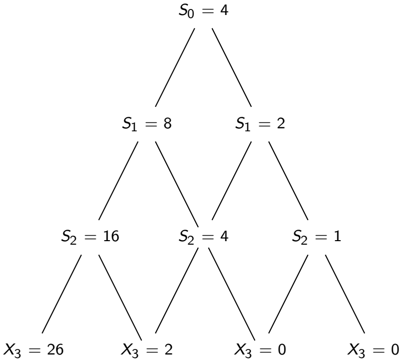


FIGURE – Evolution à 3 pas

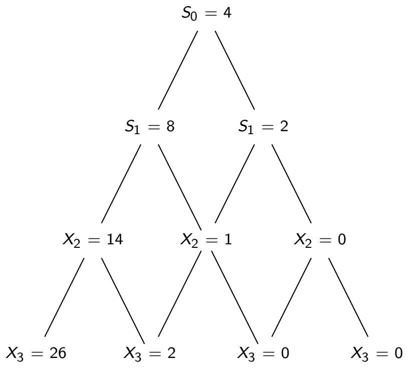


FIGURE – Evolution à 3 pas

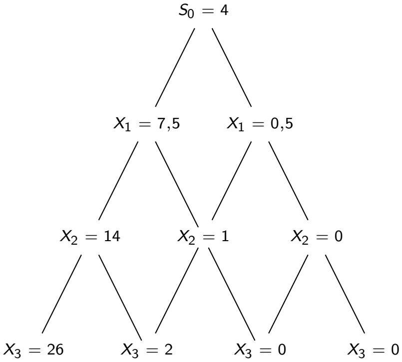


Figure – Evolution à 3 pas

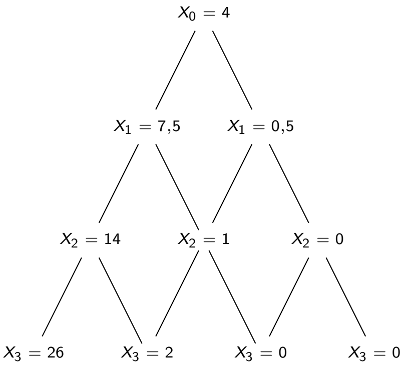


FIGURE – Evolution à 3 pas

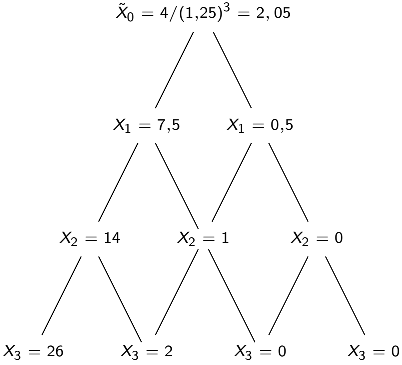


FIGURE – Evolution à 3 pas

Formules

Prix

$$\text{Prix} \; = \frac{1}{(1+r)^N} \mathbf{E}_p \left[V_N \right].$$

Formules

Prix

$$\text{Prix} = \frac{1}{(1+r)^N} \mathbf{E}_p \left[V_N \right].$$

Stratégie de couverture

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{E}_{1/2} \left[D_k V_N \mid \mathcal{F}_k \right]}{D_k S_k}.$$

Méthode

- Ecrire le système linéaire : trop dur !

Méthode

- Ecrire le système linéaire : trop dur !
- Être malin !

Méthode

- Ecrire le système linéaire : trop dur !
- Être malin !
- On suppose $r = 0$ (juste pour simplifier la présentation)

Objectif

- Il *suffit* de trouver $\gamma_0, \cdots, \gamma_N$ tels que

$$V_N = X_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j (S_{j+1} - S_j).$$

Objectif

- Il *suffit* de trouver $\gamma_0, \cdots, \gamma_N$ tels que

$$V_N = \mathbf{E}_{1/2}\left[V_N\right] + \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j (S_{j+1} - S_j).$$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$
- $U_k(\omega) = \omega_k$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$
- $U_k(\omega) = \omega_k$
- $\mathbf{P}(U_k = 1) = \mathbf{P}(U_k = -1) = \frac{1}{2}$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$
- $U_k(\omega) = \omega_k$
- $\mathbf{P}(U_k = 1) = \mathbf{P}(U_k = -1) = \frac{1}{2}$
- Espérance

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[F(U_1, \cdots, U_N)\right] = \sum_{i_1=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} F(i_1, \cdots, i_N) 2^{-N}$$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$
- $U_k(\omega) = \omega_k$
- $\mathbf{P}(U_k = 1) = \mathbf{P}(U_k = -1) = \frac{1}{2}$
- Espérance

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[F(U_1, \cdots, U_N)\right] = \sum_{i_1=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} F(i_1, \cdots, i_N) 2^{-N}$$

- Exemple :

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[1 + pU_i\right] = \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1$$

Espace d'état = pile/face à N coups

- $\omega = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$
- $U_k(\omega) = \omega_k$
- $\mathbf{P}(U_k = 1) = \mathbf{P}(U_k = -1) = \frac{1}{2}$
- Espérance

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[F(U_1, \cdots, U_N)\right] = \sum_{i_1=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} F(i_1, \cdots, i_N) 2^{-N}$$

- Exemple :

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[1 + pU_i\right] = \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1$$

- Conséquence :

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[(1 + p_1 U_1)(1 + p_2 U_2) \ldots\right] = 1$$

Prix

- Si $U_j = 1$ alors $S_{j+1} = S_j u$

Prix

- Si $U_j = 1$ alors $S_{j+1} = S_j u$
- par conséquent

$$S_k = \left(\frac{u+d}{2}\right)^k \prod_{j=1}^{k} (1 + \frac{u-d}{u+d}\ U_j)$$

Prix

- Si $U_j = 1$ alors $S_{j+1} = S_j u$
- par conséquent

$$S_k = \left(\frac{u+d}{2}\right)^k \prod_{j=1}^{k} (1 + \frac{u-d}{u+d}\ U_j)$$

- ce qui s'écrit

$$\ln S_k = \ln(\sqrt{ud})\ k + \sum_{j=1}^{k} \ln(\frac{u}{d})\ U_j$$

Espérance conditionnelle

- On suppose connue la branche de l'arbre jusqu'au rang k,

Espérance conditionnelle

- On suppose connue la branche de l'arbre jusqu'au rang k,
- On calcule la valeur moyenne du futur à partir de cet instant

Espérance conditionnelle

- On suppose connue la branche de l'arbre jusqu'au rang k,
- On calcule la valeur moyenne du futur à partir de cet instant
- On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{1/2}\left[F(U_1, \cdots, U_N) \,|\, U_1 = i_1, \cdots, U_k = i_k\right] \\
&\qquad = \sum_{i_{k+1}=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} F(i_1, \cdots, i_k, i_{k+1}, \cdots i_N) 2^{-(N-k)}
\end{aligned}$$

Exemple

$$\mathbf{E}_{1/2}\left[(1+p_1U_1)(1+p_2U_2)\dots(1+p_NU_N)\,|\,U_1=u_1,\cdots,U_k=u_k\right]$$
$$=\prod_{l=1}^{k}(1+p_lu_l) \qquad (3)$$

Opérateur de différence

$$D_k F(U_1, \cdots, U_N) = \frac{1}{2}(F(U_k^+) - F(U_k^-))$$

où

$$\begin{aligned} U_k^+ &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, \quad 1, \; U_{k+1}, \cdots) \\ U_k^- &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, -1, \; U_{k+1}, \cdots) \end{aligned}$$

Opérateur de différence

$$D_k F(U_1, \cdots, U_N) = \frac{1}{2}(F(U_k^+) - F(U_k^-))$$

où

$$\begin{aligned} U_k^+ &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, \quad 1, \; U_{k+1}, \cdots) \\ U_k^- &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, -1, \; U_{k+1}, \cdots) \end{aligned}$$

Exemple

$$D_k(1 + p_k U_k) = \frac{1}{2}\,(1 + p_k - (1 - p_k)) = p_k$$

Formule de Clark-Ocone

Théorème

$$F = \mathbf{E}_{1/2}\left[F\right] + \sum_{k=1}^{N} \beta_k U_k.$$

$$\beta_k = \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \,\middle|\, U_1, \cdots, U_k \right]$$

Preuve

$$Z_N = \prod_{k=1}^{N} (1 + p_k U_k) = 1 + \sum_{k=1}^{N} Z_{k-1} p_k U_k$$

$$\begin{aligned} D_k Z_N &= \frac{Z_N}{1 + p_k U_k}\ p_k \\ &= p_k (1 + p_1 U_1) \dots (1 + p_{k-1} U_{k-1})(1 + p_{k+1} U_{k+1}) \dots (1 + p_N U_N) \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{E}_{1/2} [D_k Z_N \,|\, U_1, \cdots, U_k] = p_k (1 + p_1 U_1) \dots (1 + p_{k-1} U_{k-1}) = p_k Z_{k-1}$$

$$Z_N = \mathbf{E}_{1/2} [Z_N] + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}_{1/2} [D_k Z_N \,|\, \mathcal{F}_{k-1}]\, U_k.$$

Conséquence

Application à S_j

$$S_{j+1} - S_j = D_j S_j \, U_j$$

Conséquence

Application à S_j

$$S_{j+1} - S_j = D_j S_j \, U_j$$

Application à V_N

$$\begin{aligned} V_N &= X_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}_{1/2}\left[D_j V_N \,|\, \mathcal{F}_j\right] U_j \\ &= X_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mathbf{E}_{1/2}\left[D_j V_N \,|\, \mathcal{F}_j\right]}{D_j S_j} \quad (S_{j+1} - S_j) \end{aligned}$$

Non arbitrage

Condition de non arbitrage

Si

$$\sum_{i=1}^{N-1} H_i(S_0, \cdots, S_{i-1})\,(S_{i+1} - S_i) \geq 0$$

alors

$$H_i(S_0, \cdots, S_{i-1}) = 0, \text{ pour tout } i.$$

Non arbitrage

Condition de non arbitrage

Si

$$\sum_{i=1}^{N-1} H_i(S_0, \cdots, S_{i-1}) \, (S_{i+1} - S_i) \geq 0$$

alors

$$H_i(S_0, \cdots, S_{i-1}) = 0, \text{ pour tout } i.$$

Théorème

La CNA est vérifiée ssi il existe une unique probabilité risque-neutre.

$N = 1$

- Probabilité risque-neutre : p tel que

$$pS_0u + (1 - p)S_0d = S_0(1 + r)$$

$N = 1$

- Probabilité risque-neutre : p tel que

$$pS_0 u + (1-p)S_0 d = pS_0(1+r) + (1-p)S_0(1+r)$$

$N = 1$

- Probabilité risque-neutre : p tel que

$$pS_0u + (1-p)S_0d = pS_0(1+r) + (1-p)S_0(1+r)$$

- Cela équivaut à

$$S^0\left[p(u-1-r) + (1-p)(d-1-r)\right] = 0$$

$N = 1$

- Probabilité risque-neutre : p tel que

$$pS_0u + (1-p)S_0d = pS_0(1+r) + (1-p)S_0(1+r)$$

- Cela équivaut à

$$p(u-1-r) + (1-p)(d-1-r) = 0$$

$N = 1$

- Probabilité risque-neutre : p tel que

$$pS_0u + (1-p)S_0d = pS_0(1+r) + (1-p)S_0(1+r)$$

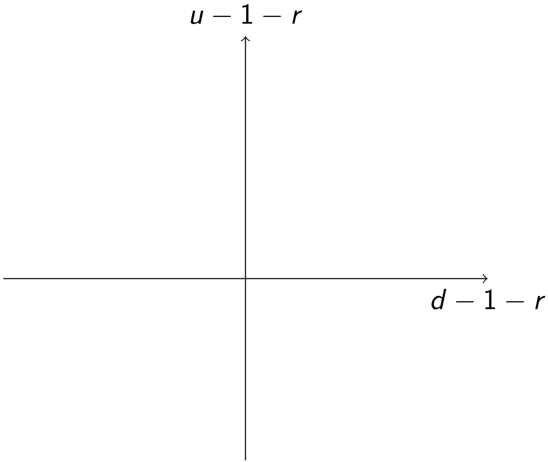
- Cela équivaut à

$$p(u-1-r) + (1-p)(d-1-r) = 0$$

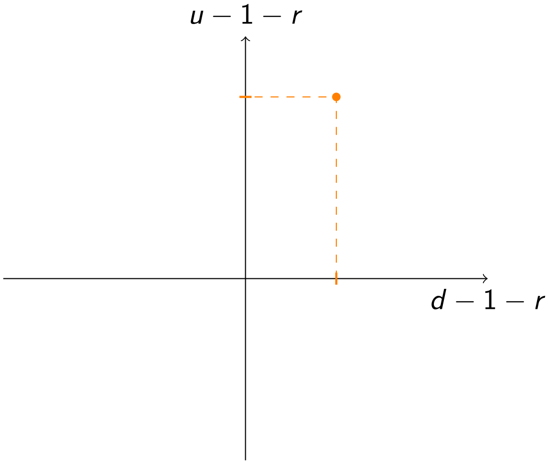
- Ou

$$\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u-1-r \\ d-1-r \end{pmatrix} = 0$$

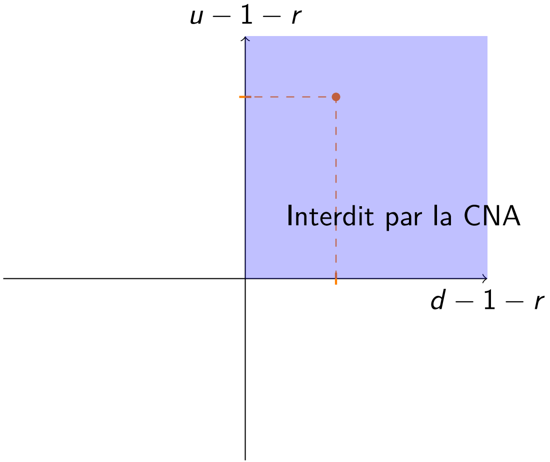
Interprétation géométrique



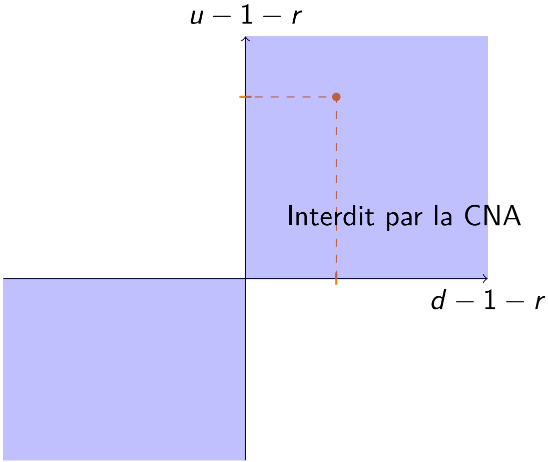
Interprétation géométrique



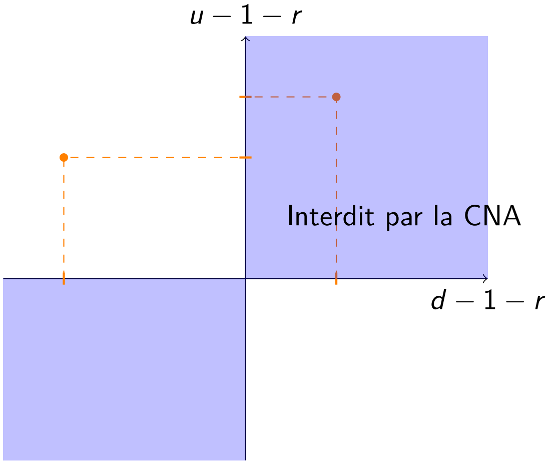
Interprétation géométrique



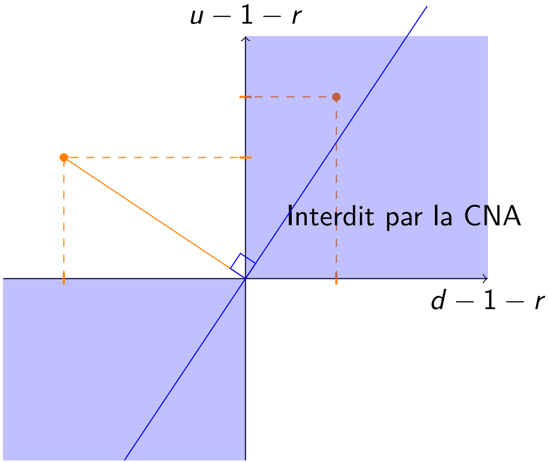
Interprétation géométrique



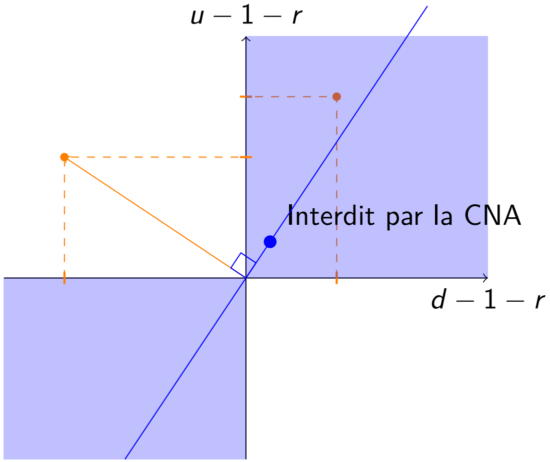
Interprétation géométrique



Interprétation géométrique

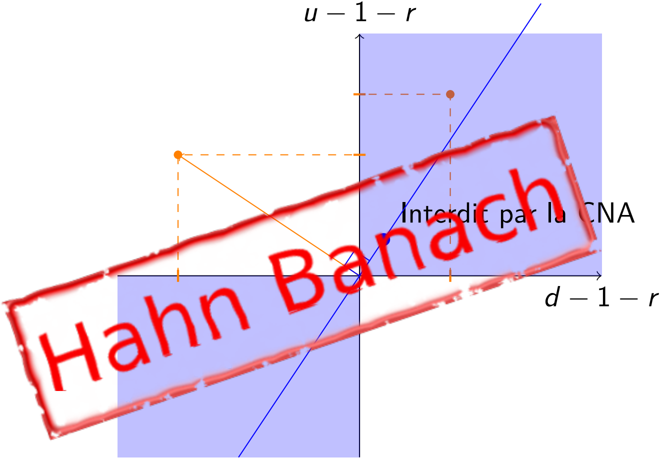


Interprétation géométrique

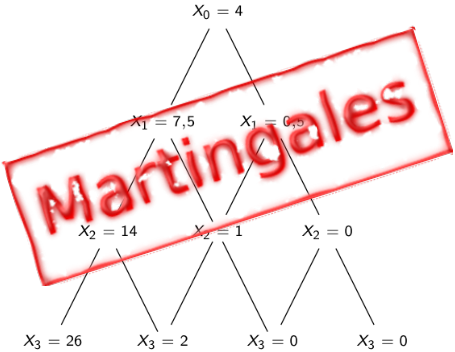


play

Interprétation géométrique



play


$X_0 = 4$
$X_1 = 7{,}5$
$X_1 = 0{,}5$
$X_2 = 14$
$X_2 = 1$
$X_2 = 0$
$X_3 = 26$
$X_3 = 2$
$X_3 = 0$
$X_3 = 0$
Martingales

Prix

$$\text{Prix} = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbf{E}[p]\,V_N.$$

Stratégie de couverture

$$\alpha_k = \frac{D_k V_k}{D_k S_k}.$$

Calcul de Malliavin