



Aspects mathématiques dans les concours de programmation

B. Meyer

Cours INF280, département INFRES





Contenu

Arithmétique et théorie des nombres

Formules de combinatoire

Dénombrement et probabilités

Théorie des jeux

En quelques mots

- ▶ Nombreuses occurrences de questions mathématiques (parfois noyées dans la narration).
- ▶ Réponse immédiate ou rapide si on connaît ses formules, sinon alternative en force brute.
- ▶ Favorise des compétiteurs cultivés.
- ▶ Difficile de faire un cours structuré.

Méthodes ad hoc

Thèmes fréquents :

- ▶ Recherche de formules ou de motifs,
(Ex : UVa10161, UVa11231)
- ▶ Suites de nombres,
(Ex : UVa10408)
- ▶ Systèmes de numération,
(Ex : UVa443)
- ▶ Utilisation maligne de $\sqrt{}$, \log ou \exp ,
(Ex : UVa701, UVa10916, UVa11847)
- ▶ Polynômes (produits, dérivations, évaluation).
(Ex : UVa498, UVa10268, UVa10586)



Contenu

Arithmétique et théorie des nombres

Formules de combinatoire

Dénombrement et probabilités

Théorie des jeux

Adopter le bon type

Problèmes en **apparence facile**, mais calculs **difficiles** :

- ▶ Entiers de **grosse taille** :
 - BigInteger en Java.
 - Gérer à la main en C++.
- ▶ Grande **précision** demandée :
 - Recoder une classe pour les rationnels.

Exponentiation rapide

Algorithme de type diviser pour régner :

Exponentiation rapide

Soit (M, \cdot) un monoïde, $g \in M$ et n un entier

$$g^n = g^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot g^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot g^{n \% 2}.$$

Fonctionne avec des *entiers*, des *matrices*, des *permutations*, des *chaînes de caractères*, etc.

UVa306, UVa10625, UVa10710

PGCD, relation de Bezout

- ▶ Algorithme d'**Euclide** :

```
int gcd(int a, int b) {  
    if (b == 0) return a;  
    return gcd(b, a%b);  
}
```

- ▶ Relation de **Bezout** : $ua + vb = d$ où d est le PGCD :

```
pair<int, pair<int, int>> bezout(int a, int b) {  
    if (b == 0) return make_pair(a, make_pair(1, 0));  
    pair<int, pair<int, int>> p = bezout(b, a%b);  
    int d = p.first;  
    int u = p.second.first, v = p.second.second;  
    return make_pair(d, make_pair(v, u - (a/b) * v));  
}
```

- ▶ Application : $u = a^{-1} \pmod b$ (**inversion modulaire**).

(Ex : UVa10407, UVa10090, UVa10673)

Restes chinois

Soient n_1, n_2, \dots, n_k des entiers deux à deux premiers entre eux.
Si :

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv b_k \pmod{n_k} \end{cases},$$

alors, en notant $c_i = (N/n_i)^{-1} \pmod{n_i}$, on a :

$$x \equiv b_1 \frac{c_1 N}{n_1} + b_2 \frac{c_2 N}{n_2} + \dots + b_k \frac{c_k N}{n_k} \pmod{N},$$

où $N = n_1 n_2 \cdots n_k$.

Nombres premiers

- ▶ On génère la liste des premiers par le **crible d'Ératosthène** :

```
bitset<10000001> P;  
vector<long long> premiers;  
P.set(); // initialisation  
P[0] = P[1] = 0;  
for (long long i = 2; i < pmax; i++)  
    if (P[i]) {  
        for (long long j=i*i; j < pmax; j+=i)  
            P[j]=0;  
        premiers.push_back(i);  
    }
```

- ▶ Factorisation d'un entier n : par divisions successives, chercher les diviseurs de n parmi les premiers $\leq \sqrt{n}$.

(Ex : UVa10140)

Suites récurrentes ultimement périodiques

Soit S un ensemble fini, $f : S \rightarrow S$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

Trouver λ et μ minimaux tel que $x_{\lambda+\mu} = x_\mu$.

Algorithme du lièvre et de la tortue

Poser $l \leftarrow f \circ f(x_0)$; $t \leftarrow f(x_0)$.

Tant que $(l \neq t)$, faire

$l \leftarrow f \circ f(l)$; $t \leftarrow f(t)$.

$\mu \leftarrow 0$

$t \leftarrow x_0$

Tant que $(l \neq t)$, faire

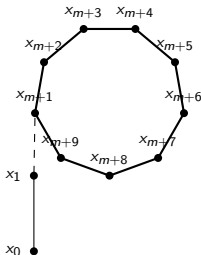
$l \leftarrow f(l)$; $t \leftarrow f(t)$; $\mu \leftarrow \mu + 1$.

$\lambda \leftarrow 1$

Tant que $(l \neq t)$, faire

$l \leftarrow f(l)$; $\lambda \leftarrow \lambda + 1$.

Renvoyer λ (période) et μ (pré-période)



(Ex : UVa350, UVa11053)



Contenu

Arithmétique et théorie des nombres

Formules de combinatoire

Dénombrement et probabilités

Théorie des jeux

Fibonacci, binomiaux

- Suite de Fibonacci (Ex : UVa763, UVa10334, UVa10518)

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

$$F_n = \frac{\phi^n + (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \text{où } \phi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

- Coefficients binomiaux (Ex : UVa10219, UVa10541)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

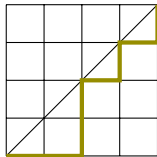
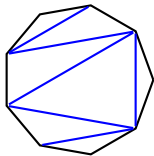
Utiliser la formule directe pour un seul coefficient ou de la programmation dynamique pour beaucoup de coefficients.

Nombres de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{2n(2n-1)}{(n+1)n} C_{n-1}.$$

Permet de compter :

- ▶ arbres binaires distincts à n sommets,
- ▶ mots de $\{(,)\}^*$ bien parenthésés,
- ▶ triangulations d'un polygone,
- ▶ chemins sous-diagonaux dans une grille carrée.



Réurrence :

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

(Ex : UVa991, UVa10007, UVa10312)

Dérangements

Définition

Un **dérangement** est une permutation sans point fixe.

Théorème (OEIS A000166)

Le nombre D_n de dérangements de $\{1, \dots, n\}$ satisfait

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n).$$

(Ex : UVa12024)

Arbres couvrants de graphes complets

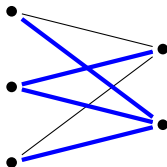
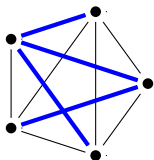
Théorème (formule de Cayley)

Il y a n^{n-2} arbres couvrants dans le graphe complet K_n .

Théorème

Il y a $n^{m-1} m^{n-1}$ arbres couvrants dans le graphe biparti complet $K_{m,n}$.

(Ex : UVa10843, UVa1179)



Formule d'Euler pour les graphes planaires

Théorème (Euler)

Un graphe planaire avec s sommets, a arêtes et f faces satisfait :

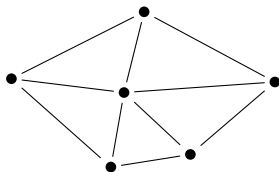
$$s - a + f = 2.$$

NB : La face extérieure est comptée.

(Ex : UVa10178)

Exemple : $s = 6$, $a = 10$, $f = 6$

$$6 - 10 + 6 = 2$$



Division du disque par des cordes

Théorème (Cercle de Moser, OEIS A000127)

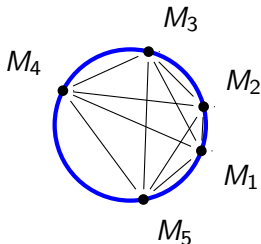
Un disque partagé par n cordes en position générique (i.e. 3 cordes ne sont pas concourantes) possède M_n parts avec :

$$M_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

(Ex : UVa10213)

Exemple : $n = 5$

$$M_5 = \binom{5}{4} + \binom{5}{2} + 1 \text{ parties}$$





Contenu

Arithmétique et théorie des nombres

Formules de combinatoire

Dénombrement et probabilités

Théorie des jeux

Problèmes de dénombrement

Approches :

- ▶ Si possible, aborder la question comme un problème de mathématiques et trouver une **formule close**,
- ▶ Sinon, chercher des relations de récurrence et utiliser de la **programmation dynamique**,
- ▶ Sinon, *force brute* (vérifier auparavant si la taille le permet).

Quelques outils

Principe d'inclusion-exclusion

Soient A et B deux ensembles, alors :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Généralise à de plus grandes unions ; aussi formule d'inversion de Möbius.

(Ex : UVa10882, UVa11806)

Formule de Burnside

Soit G un groupe agissant sur un ensemble Ω , alors :

$$|\text{Orbites}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Stab}_g(\Omega)|.$$

Coloration de collier ou de polyèdres réguliers à permutation près.

(Ex : UVa12387)

Problèmes de probabilités

Approches :

- ▶ Par du dénombrement :

$$\mathbb{P} = \frac{\# \text{ cas favorable}}{\# \text{ cas total}}.$$

- ▶ Probabilités conditionnelles parfois plus faciles à calculer.
- ▶ Processus aléatoire : calculer les paramètres puis simuler le processus sur un nombre fini suffisamment grand d'étapes.



Contenu

Arithmétique et théorie des nombres

Formules de combinatoire

Dénombrement et probabilités

Théorie des jeux

Stratégie Min-max

Jeux à deux joueurs, à somme nulle et à information complète.

- ▶ Arbre de décision :
nœud = position du jeu,
arête = coup qu'un joueur peut jouer.
- ▶ Score calculé récursivement des feuilles vers la racine :

$$\text{score}(p) = \begin{cases} \max\{\text{score}(f); f \text{ fils de } p\} & \text{si joueur joue,} \\ \min\{\text{score}(f); f \text{ fils de } p\} & \text{si adversaire joue.} \end{cases}$$

Ex : UVa10368, UVa10111

Jeu de Nim

Des pièces sont entassées en k tas. Deux joueurs jouent à tour de rôle. À chaque tour, le joueur ou son adversaire doit retirer une ou plusieurs pièces choisies dans un même tas et perd sinon.

Solution : Soit n_i le nombre de pièces dans le tas i . Le (premier) joueur a une stratégie gagnante si

$$n_1 \oplus n_2 \cdots \oplus n_k \neq 0$$

où \oplus est le XOR.

Ex : UVa11311